Ruine du joueur. (ou fortune)

Leçon: 223, 226, 260, 264

Réf: Barbaro et Barbaro

On fixe $a, A \in \mathbb{N}^*$ deux entiers strictement positifs.

a : fortune initiale du joueur (en pratique, $a \ll A$).

A : " " " casino

On lance une pièce truquée. → pile : $a+1$
→ face : $A+1$

Q1) Le jeu se termine p.s. ?

Q2) P que le joueur gagne ?

Q3) En combien de lancé le jeu se termine ?

p : pile, $q = 1-p$: face.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ v.a.i.i.d $\begin{cases} \mathbb{P}(X_1 = 1) = p \\ \mathbb{P}(X_1 = -1) = q = 1-p \end{cases}$, $X_1 = p\delta_1 + q\delta_{-1}$.

X_n : gain du joueur au n-ième lancé.

S_n : capital du joueur après n lancers de pièce.

Si $S_0 = R \in [0, a+A]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \; S_n = R + \sum_{k=1}^{n} X_k$.

et $T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n \in \{0, a+A\}\}$: durée de la partie.

avec $\min(\emptyset) = +\infty$

Théorème avec $S_0 = a$

1) Si $p > 1/2$, $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{(p-q)}\left[(a+A)\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+A}} - a\right]$

Si $p = 1/2$, $\mathbb{E}[T] = aA$

2) $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$, le jeu se finit p.s. en un nombre fini de lancers

3) Si $p > 1/2$, $\mathbb{P}(S_T = a+A) = \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+A}}$

Si $p = 1/2$, $\mathbb{P}(S_T = a+A) = \dfrac{a}{a+A}$.

Notation : $\mathbb{P}_k(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid S_0 = k)$, $\mathbb{E}_k[\cdot]$ espérance associée

Preuve

1) Calcul de l'espérance du temps de jeu.

$$\mathbb{E}_k[T] = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell\, \mathbb{P}_k(T=\ell)$$ ← formule des probabilités totales

$$= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell\, \mathbb{P}(X_1=1)\, \mathbb{P}_k(T=\ell, X_1=1) + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell\, \mathbb{P}(X_1=-1)\, \mathbb{P}_k(T=\ell \mid X_1=-1)$$

(II) $$= p \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell\, \mathbb{P}_{k+1}(T=\ell-1) + q \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell\, \mathbb{P}_{k-1}(T=\ell-1)$$

recondoral $$= p \sum_{\ell=0}^{+\infty} (\ell+1)\, \mathbb{P}_{k+1}(T=\ell) + q \sum_{\ell=0}^{+\infty} (\ell+1)\, \mathbb{P}_{k-1}(T=\ell)$$

donc $\mathbb{E}_k[T] = p(\mathbb{E}_{k+1}[T]+1) + q(\mathbb{E}_{k-1}[T]+1)$. → seule récurrente !

Donc alors pour $k \in \mathbb{N}^*$, $D_k = \mathbb{E}_k[T] - \mathbb{E}_{k-1}[T]$. Alors

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{p D_{k+1} - q D_k + 1 = 0.}$

On a des "conditions aux bords", découlant de la définition de T : $\mathbb{E}_0[T] = \mathbb{E}_{a+A}[T] = 0$.

a) Cas de la pièce truquée

On a une suite arithmético-géométrique :

$$D_{R+1} = \frac{q}{p} D_R - \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \frac{q}{p} \neq 1.$$

Donc, si on pose $l = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{q}{p} - 1} = \frac{1}{q-p}$, alors

l'unique solution de $l = \frac{q}{p} l - \frac{1}{p}$.

Donc $(D_R - l)_R$ est géométrique de raison $\frac{q}{p}$:

$$D_R - l = \left(\frac{q}{p}\right)^{R-1} (D_1 - l), \text{ et } D_1 = \mathbb{E}_1[T] \neq l.$$

Donc $\forall R \in \mathbb{N}^*$, $D_R = (\mathbb{E}_1[T] - l)\left(\frac{q}{p}\right)^{R-1} + l$.

Par télescopage, on a donc :

$$\mathbb{E}_R[T] = \sum_{D=1}^{R} D_D + \mathbb{E}_0[T] = Rl + (\mathbb{E}_1[T] - l) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^R}{1 - \frac{q}{p}}.$$

et comme $\mathbb{E}_{a+A}[T] = 0$, on a

$$(\mathbb{E}_1[T] - l) \frac{1}{1 - \frac{q}{p}} = \frac{-(a+A)l}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+A}}$$

et finalement : $\mathbb{E}_a[T] = al - (a+A)l \, \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+A}}$

b) Cas de la pièce équilibrée

On a $\forall R \in [\![1, a+A-1]\!]$, $D_{R+1} = D_R - 2$.

Donc $D_R = D_1 - 2(R-1)$.

De même, $\mathbb{E}_R[T] = \sum_{p=1}^{R} D_p + \underbrace{\mathbb{E}_0[T]}_{=0}$

$= R D_1 - 2\frac{R(R-1)}{2}$

$= R(D_1 - R + 1)$.

Or $\mathbb{E}_{a+A}[T] = 0$, donc $(a+A)(D_1 - a - A + 1) = 0$

$\Rightarrow D_1 = a + A - 1$,

Donc $\boxed{\mathbb{E}_a[T] = aA.}$

2) Temps de jeu fini presque sûrement.

Dans les deux cas, $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

Donc par contraposée à droite

$$\mathbb{P}(T = +\infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=0}^{+\infty} \{T \geq m\}\right) \left(= \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=0}^{N} \{T \geq m\}\right)\right.$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(\{T \geq N\})$$

$$\leq \lim_{N \to +\infty} \frac{\mathbb{E}[T]}{N} = 0.$$

3) Probabilité que le joueur gagne.

Soit $R \in [\![1, a+A-1]\!]$. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}_R(S_T = a+A) = \mathbb{P}_R(S_T = a+A \mid X_1 = 1)\underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 1)}_{=p}$$

$$+ \mathbb{P}_R(S_T = a+A \mid X_1 = -1)\underbrace{\mathbb{P}(X_1 = -1)}_{=q=1-p}$$

$$= p\,\mathbb{P}_{R+1}(S_T = a+A) + q\,\mathbb{P}_{R-1}(S_T = a+A)$$

On pose alors pour $k \in [\![0, a+A]\!]$, $P_k = \mathbb{P}_k(S_T = a+A)$.

Alors $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ pP_{k+1} - P_k + qP_{k-1} = 0. \\ P_0 = 0 \\ P_{a+A} = 1. \end{cases}$

a) Pièce truquée. $p \neq q$.

L'équation $px^2 - x + q$ admet pour solut° 1 et $\frac{q}{p}$.

Donc : Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ t.q $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_k = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^k$.

On résout avec les cond°s au bord.

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_{a+A} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^{a+A} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{-1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+A}} \\ \alpha = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+A}} \end{cases}$$

Donc $P_k = \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+A}}$

Donc $\mathbb{P}_A(S_T = a+A) = P_a = \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+A}}$.

b) Pièce équilibrée

On a $p = q = \frac{1}{2}$.

Donc on résout $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow 1$ est racine double

$$P_k = \alpha + \beta k \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta(a+A) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{a+A}. \end{cases}$$

Donc $\mathbb{P}_a(S_T = a+A) = \dfrac{a}{a+A}$.

□

Bonus : calcul numérique et équivalent.

- Si $a = 10^2$, $A = 10^6$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$

  $P_a(S_T = a + A) \approx 1$, $\mathbb{E}_{a+A}[T] = 5 \cdot 10^6$.

  ~ 100 jours si on lance une pièce toutes les 2 secondes

- Si $a \ll A$, de $a + A \neq A$.

  et $p > 1/2$

$$\mathbb{E}[T] \simeq \frac{A - a}{p - q} \approx \frac{A}{p - q}$$